

Бекбоев И.Б., директор центра ПШ и ДО КАО,
д.п.н., чл. – корр. НАН КР, профессор;
Син Е.Е., заведующий лабораторией ЕМП КАО,
д.п.н., доцент.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА КАК СРЕДСТВО МИРОПОЗНАНИЯ ШКОЛЬНИКА

Ключевые слова: *вероятность, случайное событие, пространство элементарных событий, статистика, математическое ожидание, дисперсия, случайное событие, вероятно – статистическое образование, биномиальное распределение вероятностей, статистические материалы, классическое, геометрическое и аксиоматическое определение вероятностей.*

Вопрос о введении в школьную математику элементов вероятно – статистических знаний, имеет исключительно важное значение. Без них математика вынуждена будет односторонне раскрывать сущность окружающего мира. Так за пределами внимания наших учащихся останется случайный характер многих явлений реальной действительности. Жизнь любого человека состоит из многочисленных случайных событий и явлений, которые тесно взаимосвязаны. Поэтому, наличие определенных статистических знаний для человека является неотъемлемым условием успешной и творческой работы в любой области деятельности.

Сегодня в обществе идет тенденция не простых социальных и экономических преобразований, которые позволяют предположить, что в ближайшем будущем, будут востребованы организаторы, участники и руководители государства и производства нового типа и с новым мышлением. В связи с этим, столь необходимую для их деятельности статистическую культуру необходимо воспитывать и формировать со школьных лет. Не случайно во многих развитых странах мира этому вопросу уделяется самое серьезное внимание. В некоторых зарубежных европейских школах с элементами теории вероятностей и статистики, учащиеся знакомятся с первых дней пребывания в школе. Затем развивают его на протяжении всего периода обучения, используя вероятно – статистические подходы к наиболее распространенным ситуациям и явлениям, встречающийся в их повседневной жизни.

Мировоззренческий аспект изучения элементов теории вероятностей и статистики в школе сегодня трудно переоценить. Важнейшей задачей вероятно – статистического образования школьников нужно считать формирование у них правильных взглядов на природу, общество и происходящие в мире события. Самые первые представления о мире случайного человек получает из наблюдений окружающей его жизни. Отдельные свои наблюдения в ходе сбора статистических сведений мы часто оформляем в виде простейших таблиц, диаграмм. Различные, неоднозначные и изменчивые результаты наблюдений говорят нам о наличии случайных, доступных или даже невозможных результатах и их последствиях. Эти умения дают нам возможность правильно формировать свое представление о случайных событиях окружающего мира.

Во время учебы, учащиеся не раз сталкиваются с необходимостью получения и оформления разного рода сведений. Так на уроке физики, химии, биологии, информатики и других предметов при выполнении практических и лабораторных работ учащиеся должны уметь оформлять результаты своих наблюдений и опытов в виде таблиц, графиков; на уроках географии, истории, обществоведении, необходимо пользоваться различными таблицами и диаграммами, воспринимать и понимать информации предоставленные в графической форме. Статистические материалы встречаются и в повседневной жизни и

многочисленных источниках информации, например: в газетах, журналах, книгах, по телевидению и т.п.

С примерами на вероятность человек сталкивается ежедневно в политической, общественной и социальной жизни: прогноз погоды, спортивный прогноз, экономический прогноз, прогноз производственных показателей, в научных исследованиях и т.д. Деятельность, а иногда и сама жизнь людей все в большей степени зависит от их способности эффективно использовать прогноз или избегать обстоятельства.

Заложить фундамент статистической и вероятностной культуры на доступных учащимся примерах призваны все школьные предметы. На уроках математики, такие знания учащиеся получают при изучении темы: элементы теории вероятностей и математической статистики, которой затем, приобретая более целенаправленный характер, продолжается в высшем учебном заведении.

Например, в учебном плане Англии и Уэльса на изучение вероятностно – статистического материала уделяется особое внимание. Учащиеся младших классов на уроках математики учатся выполнять группировку объектов по определенным признакам, собирать информацию и заполнять статистическими данными таблицу, читать простейшие диаграммы, использовать в своей речи вероятностную терминологию и говорить о вероятностном исходе определенных событий. А итоговые требования к знаниям учащихся средних школ свидетельствуют о том, что они успешно освоили различные способы обработки и представления статистических данных, умеют работать с базами данных, оценивают и вычисляют несложные вероятности, проводят статистические гипотезы. В целом вероятностям и статистике посвящена 3 из 14 итоговых требований к математическим знаниям в английской школе [1, с. 9 - 10].

Говоря о школах Японии следует отметить, что в них идет серьезный пропедевтический курс статистики, который изучается в курсе математики со 2 - го класса (когда большинству учащихся исполняется 7 - 8 лет). В течение всего периода обучения в младшей школе вероятностно – статистический материал изучается в виде упражнений с эмпирическими данными, с работой по таблицам и диаграммам. Для этого выделены отдельные темы курса математики. Анализ учебной программы японских школ по математике в младших классах показывает, что вопросам пропедевтике вероятности, элементом статистики только в 1 классе отводится 8 часов (это касается таких тем как: деление данных на шаги, гистограмма, кривые распределения, относительные частоты, таблицы, графики, средние арифметические выборки и т.д.). Во 2 - ом классе на изучение элементов теории вероятностей отводится уже 15 часов, которые распределяются на изучение таких тем как: подсчет шансов случайного события, определение возможных исходов событий, перестановки и сочетание из n элементов по m для простых случаев. В 3 классе на протяжении 11 часов изучаются показатели разброса данных, правила применения выборки для анализа генеральной совокупности, корреляционные таблицы, различные диаграммы и др. [1, с. 10].

Благодаря этому в школах Японии вероятностные понятия прочно входят в круг повседневных представлений учащихся и взрослых об окружающем мире, а на всех японских микрокалькуляторах и сотовых телефонах имеется коэффициент корреляции, которыми учащиеся пользуются как на уроках математики, так и по другим предметам.

В отдельных школах США системное изучение элементов вероятности и статистики начинается с 5 класса, где пристальное внимание уделяется знакомству учащихся с вероятностными моделями реальных ситуаций, сравнению ожидаемых результатов, полученных в ходе опыта или эксперимента. По мнению американских педагогов, те знания, которые ученики получают на уроках по теории вероятностей и математической статистики, должны быть интересны и призваны способствовать повышению математической культуры учащихся, развитию прикладных умений и навыков. В старших классах вероятностные идеи и методы используются для постановки и решения задач как теоретического, так и прикладного характера. Так учащиеся американских школ знакомятся с распределением дискретных случайных величин, с нормальным распределением, при решении задач

применяют средние характеристики выборки, находят показатели вариации и коэффициенты корреляции для анализа и сравнении выборок и др.

У наших ближайших соседей в школах Казахстана материалы статистического анализа и вероятности изучаются в 9 и в 11 классах. Казахские школьники изучают элементы теории вероятности и математической статистики в два цикла: в 9 классе в курсе «Алгебра» знакомятся с такими понятиями как случайные события, виды вероятностей, способы изображения статистических данных и их числовые характеристики, проводят выборку по генеральной совокупности. В 11 классе на уроках «Алгебры и начала анализа» учащиеся осуществляют простейшие действия по вычислению вероятностей, операции со случайными величинами, находят дисперсию и математическое ожидание случайных величин.

Такое деление материалов теории вероятности и математической статистики в два этапа методически оправдано, а ее содержание тесно стыкуется с основным курсом школьной математики в указанных классах.

В действующей программе по математике для учащихся V - XI классов у наших учащихся элементы теории вероятностей и математической статистики изучаются в курсе «Алгебра и начала анализа в 10 классе» на которое выделяется всего 11 часов и запланировано изучение таких тем как: «Возникновение теории вероятности. Факты. События. Противоположное событие. Классическое, статистическое и геометрическое определение вероятности. Событие как величина. Разбор статистических данных: полигон, гистограмм, математические ожидания, дисперсия. Бином Ньютона. Биномиальное распределение вероятностей.

На наш взгляд, изучение элементов теории вероятностей и математической статистики, следует сохранить в курсе «Алгебра и начала анализа 10 класса» при этом целесообразно остановиться на изучение следующих модулей:

Модуль 1. Теория вероятностей. В этом модуле следует остановиться на изучение основных понятий и определений вероятностей, видах вероятностей и действия над вероятностями.

Модуль 2. Математическая статистика. Здесь следует дать учащимся материалы формирующие понятие о статистике, научить способам изображения статистических данных и самостоятельно давать числовую характеристику статистическим событиям.

Модуль 3. Случайные величины. Усвоение предыдущих двух модулей позволяют перейти к определению понятия случайной величины, вычислению математического ожидания и дисперсии случайной величины. Ознакомление учащихся с биномом Ньютона биномиальным распределением вероятностей.

Появление в школьной программе элементов теории вероятности и статистики, ориентированный на знакомство учащихся с вероятностной природой большинства явлений окружающей действительности, будет способствовать усилению мировоззренческих и общекультурных ценностей, возникновению глубоко обоснованных межпредметных связей и гуманитаризации школьного математического образования.

Поэтому, при отборе материалов для этой линии школьного курса необходимо учитывать не только математическую, но и общеобразовательную значимость и мировоззренческий потенциал предлагаемых тем. Важно правильно оценить: Какие знания нужны выпускнику в повседневной жизни и в трудовой деятельности? Что потребуются ученику для изучения других школьных предметов, для продолжения своего образования в будущем?

Наиболее типичные черты изучаемых явлений и их общие тенденции могут быть выявлены с помощью средних статистических характеристик. Умение пользоваться ими характеризует наличие у учащихся определенных представлений, связанных с тенденциями в мире случайных событий. Понимание смысла самых простых средних показателей, как среднее арифметическое (среднее статистическое) необходимо каждому ученику. Примеры на них часто можно слышать в жизни, в средствах массовой информации: «средняя температура», «средняя зарплата», «средняя семья», «средний доход» и т.д. Умение

ориентироваться в этих показателях помогает человеку правильно принимать решения и адекватно воспринимать поступающую к нему информацию [2, с. 47].

Важным компонентом формирования и развития статистического мышления учащихся является понимание степени устойчивости в мире случайностей и упорядоченности случайных факторов. Все стихийно происходящие и воспринимаемые человеком случайные явления тесно между собой – взаимосвязаны. И конечно, в нем особое место уделяется закону больших чисел. Одним из простых и доступных для учащихся путей по формированию представлений о вероятности как о «теоретически ожидаемом» значении частоты при увеличении числа наблюдений.

В зависимости от уровня подготовленности учащихся можно дать следующие понятия вероятности:

- классическое определение вероятности,
- геометрическое определение вероятности,
- аксиоматическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности

При классическом определении понятия вероятности, появление вероятности определенного события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

Пусть производится опыт с n равнозначными исходами, образующими полную группу несовместимых событий. Такие исходы называются элементарными исходами или событиями (случаями, шансами и т. п.). Случай, который приводит к наступлению события A , будем называть благоприятным ему. Пусть m – число благоприятных событий из n – возможных. Тогда вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев. Ее вероятность находится по формуле:

$$P(A) = m/n \quad (1)$$

Такое определение вероятности называется классическим определением вероятности.

Из классического определения следует следующие основные свойства вероятности:

$$1^\circ 0 \leq p(A) \leq 1, \quad (2)$$

$$2^\circ p(\emptyset) = 0, \text{ где } \emptyset \text{ пустое пространство}; \quad (3)$$

$$3^\circ p(C) = 1, \text{ где } C - \text{пространство элементарных событий}; \quad (4)$$

$$4^\circ p(\bar{A}) = 1 - p(A), \text{ где } \bar{A} \text{ противоположное событие к } A; \quad (5)$$

$$5^\circ p(A+B) = p(A) + p(B), \text{ если } AB = \emptyset, \text{ где } A, B \quad (6)$$

независимые события.

Геометрическое определение вероятности

Геометрическая вероятность является обобщением понятия «классической вероятности» на случай, когда число опытов имеет бесконечное (другими словами, несчетное) число исходов. К этому понятию приводят задачи на подсчет вероятности попадания точки в некую область. Такой областью могут быть отрезок, часть плоскости, часть тела и т.д.

Пусть пространство элементарных событий C представляет собой некоторую область плоскости. Тогда в качестве события могут рассматриваться область A , содержащийся в C .

Вероятность попадания в область A точки, наудачу выбранной из области C , называется геометрической вероятностью события A и находится по формуле:

$$P(A) = S(A) / S(C), \quad (7)$$

где $S(A)$ и $S(C)$ площади областей A и C соответственно.

Чтобы придать понятиям теории вероятностей строгость, присущую другим математическим понятиям, можно воспользоваться широко распространенным в математике аксиоматическим методом. Он состоит в том, что с самого начала фиксируются первичные, не подлежащие определению понятия данной теории. Их основные свойства формулируются в виде ряда аксиом. После этого все предложения теории (это прежде всего теоремы)

выводятся из аксиом, строго логическим путем. Современная аксиоматика теории вероятностей принадлежит советскому математику А.Н. Колмогорову [3].

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть C - множество всех возможных исходов некоторого опыта (эксперимента). Согласно аксиоматическому определению вероятности, каждому событию A (где A подмножество множества C) ставится в соответствие некоторое число $P(A)$, называемое вероятностью события A . При этом должны выполняться следующие аксиомы вероятностей:

$$1) P(A) \geq 0, \quad (8)$$

$$2) P(C) = 1, \quad (9)$$

$$3) P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j), \quad (10)$$

где $A_i \cdot A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) т.е. вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Из аксиом вероятностей следуют следующие свойства вероятности:

$$1^\circ P(\emptyset) = 0, \text{ т.е. вероятность невозможного события равна нулю} \quad (11)$$

$$2^\circ P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad (12)$$

$$3^\circ 0 < P(A) < 1 \text{ для любого события } A. \quad (13)$$

$$4^\circ P(A) \leq P(B), \text{ если } A \text{ является подмножеством } B. \quad (14)$$

$$\text{и } A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Если множество C состоит из n равновероятных элементарных событий, то вероятность события A определяется по формуле классического определения вероятности.

Математическая статистика

Математическая статистика это важный раздел математики, который посвящен математическим методам систематизации, обработки, анализа и использования статистических данных как для научных, так и для практических выводов.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистических совокупностей объектов, называется статистическим. Статистический метод применяется в самых различных областях знаний и практики. Использование статистических методов в жизни весьма различны и своеобразны по природе. Например, социально – экономическая статистика, медицинская статистика, спортивная статистика, звездная статистика и др.

Математическая статистика имеет тесную связь с теорией вероятностей, которая имеет в различных случаях разный характер взаимосвязи. Теория вероятностей изучает не любые явления, а явления случайные, можно сказать «вероятностно случайные», а статистика – уже случившиеся явления и тем не менее теория вероятностей играет важную роль при статистическом изучении массовых явлений любой природы, которые могут и не относиться к категориям случайных. Это осуществляется через основанные на теории выборочного метода и теории ошибок измерений. В этом случае вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приемы их исследования.

Важную роль теория вероятностей играет при статистическом исследовании вероятностных явлений. Здесь в полной мере находят применение такие основанные на теории вероятностей разделы математической статистики как теория статистической проверки вероятностных гипотез, теория статистической оценки распределений вероятностей и входящих в них параметров.

Вероятностные закономерности получают статистическое выражение, а сами вероятности осуществляются приближенно в виде частот, а математическое ожидание как проявление определенных событий – в виде средних значений.

Одной из важных целей изучения вероятностно – статистического материала в школе является развитие вероятностной интуиции, формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений в окружающей ученика среде обитания. Не смотря на то, что каждое событие в отдельности является случайным, их появление вполне прогнозируемо и они подчиняются определенным закономерностям.

Научная ценность вероятности в том, что количественная оценка возможности наступления некоторого события может быть определена и осуществлена до проведения самого эксперимента, причем исходя только из теоретических соображений. Этим самым мы подводим учащихся к вычислению вероятности по классической схеме и учим применять их на других школьных предметах и в жизни.

Число примеров и различных подходов к изучению вероятностно – статистического материала в средней школе можно увеличить, поскольку за последние десятилетия практически каждая страна ввела или вводит материалы вероятностей и математической статистики в школьную программу. Так интересные разработки появились во Франции, Швеции, в Израиле, в Польше, в Венгрии и в других странах. Их анализ позволяет сделать следующие выводы:

- в большинстве стран, элементы теории вероятностей и статистики преподносятся ученикам как пропедевтический и начинают изучаться еще в начальной школе;
- на протяжении всех лет обучения в школе учащиеся знакомятся с вероятностно – статистическими подходами в эмпирической форме, причем большую роль в этом играют задачи прикладного характера и использование знаний для анализа реальных ситуаций;
- изучение материалов распадается на вероятностную и статистическую составляющую, тесно связанные между собой, а в отдельных странах они дополнены небольшими фрагментами из комбинаторики;
- в процессе изучения материалов статистики и вероятности требуется проведения лабораторных работ, коллективный сбор материалов (статистических данных), проведение эксперимента и организация самостоятельных исследований учащихся.

Мы считаем, что изучение вероятностно – статистического материала в школе должно быть направлено на развитие личности школьника, расширение возможности ориентироваться в общественных процессах, анализировать ситуации и обогащать систему взглядов на мир и происходящие события осознанными представлениями о закономерностях в массе случайных фактов.

Литература

1. Бычкова Л.О., Селютин В.Д. Об изучении вероятностей и статистики в школе // Математика в школе. – 1991. - № 6. – С. 9 – 12.
2. Чебышев П.Л. О средних величинах. В кн.: Полн. собр. соч., т.2. М – Л. 1947.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей, 2 - ое изд. – М., Просвещение, 1974. – 183 с.