БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИННОВАЦИЯ

ОБРАЗОВАНИЕ И ИННОВАЦИИ

EDUCATION AND INNOVATION

Син Елисей Елисеевич
доктор педагогических наук, профессор
Центр теории и технологии обучения
Кыргызская академия образования

ДЕЛЬТОИД КАК НОВАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА В СОДЕРЖАНИИ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Син Елисей Елисеевич
педагогика илимдеринин доктору, профессор
Окутуунун теориясы жана технологиясы борборунун
Кыргыз билим берүү академиясы

МЕКТЕП МАТЕМАТИКАСЫНЫН МАЗМУНУНДА ДЕЛЬТОИД ЖАҢЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ФИГУРА КАТАРЫ

Sin Elisei Eliseevich
Doctor of pedagogical sciences, professor
Center pre-school and school education
Kyrgyz Academy of Education

THE DELTODE AS A NEW GEOMETRIC FIGURE IN THE CONTENT OF SCHOOL MATHEMATICS

Аннотация: *Статья посвящена изучению в общеобразовательной школе новой для школьной математике темы: «Дельтоид», о которой впервые упоминается в предметном стандарте (2015 г.) и в новой программе по математике для основной средней школы 5 – 9 классы (2016 г.). В работе даётся определение новой фигуры, виды, свойства дельтоида, а также формулы для нахождения его периметра, площади и т.д. Отдельные задачи, связанные со свойствами дельтоида помогут глубже ознакомиться с интересной, практичной и реально существующей геометрической фигурой – дельтоид.*

Аннотация: *Макала жалпы билим берүү мектериндеги математиканы окутууда жаңы киргизилген «Дельтоид» деген теманы окутууга арналмакчы, бул жөнүндө биринчи жолу 2015 предметтик стандартта жана жаны 2016 жылы 5-9 класстар үчүн жазылган программада сөз болгон. Бул макалада дельтоиддин аныктамасы, түрлөрү, касиеттери жана периметрин, аянтын табуу формулалары берилет. Бул кызыктуу практикалык жана реалдуу геометриялык* *фигура Дельтоид менен тереңирээк таанышууда кээ бир маселелер жардам берет.*

Annotation: *The article is devoted to the study in the general education school of a new topic for school mathematics: «Deltoids», which is first mentioned in the subject standard (2015) and in the new mathematics program for the main secondary school, grades 5-9 (2016). The work provides definitions, types, properties of the deltoid, as well as formulas for finding the ago perimeter, area, etc. Separate tasks related to the properties of the deltoids will help to get more acquainted with the interesting practical and real geometrical figure-deltoids.*

Ключевые слова: *дельтоид, их элементы, виды, свойства, площадь дельтоида.*

Түйүндүү түшүнүктөр: *дельтоид, анын элементтери, түрлөрү, дельтоиддин аянты.*

Key words*: deltoid, their elements, species, properties, area of the deltoid.*

Формирование научного мировоззрения – одна из важнейших задач преподавания математики в школе. Однако для его осуществления требуется обновление структуры, содержаний и поиск методических подходов. Сегодня стало очевидным, что традиционное школьное математическое образование, особенно его содеждательная часть не оправдывает надежд на полноценное развитие и воспитание человека [5, с. 55]. Отдельные материалы как например, «Тригонометрическая функция», «Логарифмы», «Сложные функции» и др. не имеют прямого «выхода» на практику. А элементы математического анализа заново изучаются курсе математики высшей школы.

Планируемый переход общеобразовательных организаций республики на реализацию Государственного образовательного стандарта (2014 г.), нового предметного стандарта [1;2], программы по математике для основной средней школы (5 – 9 классы) и использование учебников нового поколения несут в себе дополнительные трудности. В связи с этим целью исследования было - сформировать учебно-методическую базу изучения темы «Дельтоид».

Новая программа и учебники по математике отличаются от действующих не только последовательностью предоставлении основных учебных материалов и временем, отводимое на их изучение, но и своим содержанием. Одним из таких новых тем появившейся в отечественных учебниках, является дельтоид. И нашей задачей было создание научных основ содержания темы «Дельтоид». Изучение темы базируется на четырехугольниках. При этом активно используются методы: сопоставления, сравнения, аналогии, обобщения и другие. Недостаток времени отводимое в школе на изучение темы «Дельтоид» компенсируется решением задач.

С дельтоидом люди знакомы давно. Первые представление об этой замечательной фигуре может дать размах крыльев птиц при их парении в воздушном потоке, силуэт летящего самолета, спортивный дельтоплан, обыкновенный «воздушный змей» и т.д. Несмотря на такую известность, реальное его существование и практическую ценность дельтоид не нашёл «прописку» в старых стандартах, программах и в учебниках по математике в школах, и вузе. При разработке предметного стандарта и учебной программы мной перед коллегами-математиками был инициирован вопрос о включение темы дельтоид в содержание математического образования школьников. Эта идея была поддержана.

В математике существуют множество терминов, с помощью которых одно понятие можно выразить через другое более известное, более доступное и простое. Например, понятие «квадрат» можно дать через его видовое сходство: «квадрат - это правильный четырёхугольник», или «квадрат - это ромб с прямым углом», или «квадрат – это прямоугольник с равными сторонами» и т.д. Аналогично поступили и авторы учебника «Математика 7». «Дельтоид – четырёхугольник, обладающий двумя парами сторон одинаковой длины. В отличие от параллелограмма, равными являются не противоположные, а две пары смежных сторон» [3, с.208].

В отличие от авторов мы даём другое определение: «Дельтоид – это четырехугольник, у которого две пары равных сторон образуют смежные углы, расположенные друг против друга». Ясно, что упомянутые углы будут противоположными иначе дельтоид не построить. Однако упоминание об углах облегчает их ассоциацию об особенностях определяемой фигуры. Дельтоиды бывают выпуклые и невыпуклые. Дельтоид называется выпуклым, если диагонали пересекаются внутри дельтоида. И дельтоид называется невыпуклым, если диагонали не пересекаются. Так на рисунке 1 четырехугольник АВСД – выпуклый, так как диагонали АС и ВД пересекаются в точке О. В то время как на рисунке 2 четырёхугольник АВСД невыпуклый дельтоид. Его диагонали АС и ВД не пересекаются (иногда уточняют «не пересекаются внутри дельтоида АВСД). Точка О получается при пересечении, если диагональ ВД продолжить в сторону АС.

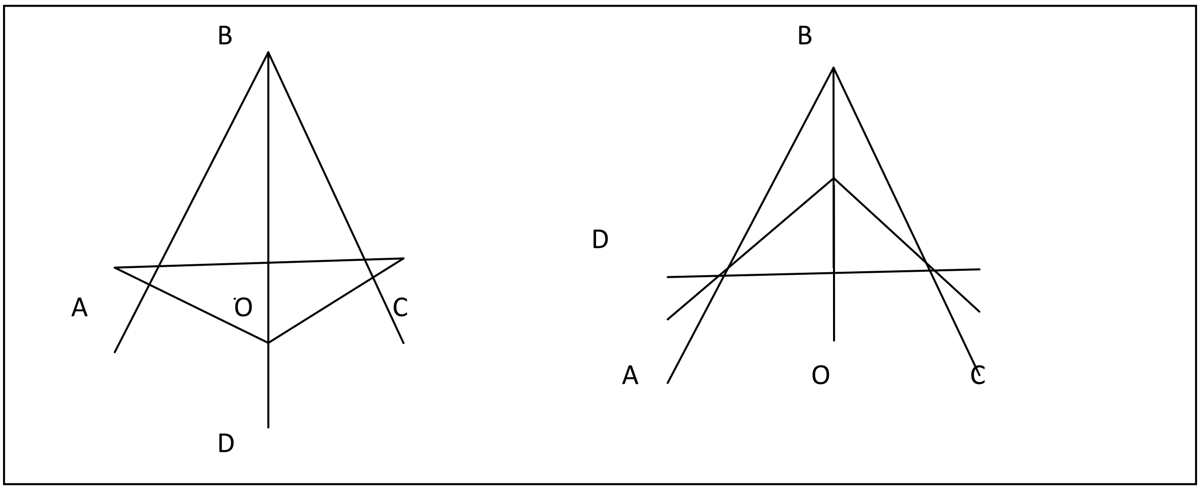

Рис.1. Рис.2.

При первом знакомстве с дельтоидом возникает иллюзия его сходства с ромбом (так как диагонали пересекаются под прямым углом, боковые углы равны и др.). И это не случайно. Что их роднит?

1. У ромба и выпуклого дельтоида диагонали пересекаются под прямым углом (они взаимно перпендикулярны).

2. У ромба и дельтоида имеется ось симметрии, следовательно «боковые углы» равны.

3. У ромба и дельтоида стороны попарно равны (У ромба в отличие от дельтоида – все стороны равны).

4. Диагонали при пересечении делятся: у ромба оба диагонали делятся пополам, а у дельтоида только одна диагональ делится пополам.

Рассмотрим на рисунках 1 и 2 отдельные признаки дельтоидов:

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}|,\ |AD| = |DC|.$$

Если провести в них диагональ АС, то получатся по два равнобедренных треугольника: треугольник АВС и АСД (у ромба диагонали делят его на два равных треугольника). Тогда, воспользовавшись свойствами равнобедренных треугольников, получим следующие свойства дельтоида:

1. Дельтоиды имеют одну ось симметрии (у дельтоида-ромба две оси симметрии). Углы образованные не равными сторонами дельтоида имеют равную величину. Их на практике называют боковыми углами дельтоида (У ромба противолежащие углы равны).

2. Диагонали выпуклого дельтоида перпендикулярны друг другу и пересекаются внутри дельтоида. У невыпуклого дельтоида диагонали не пересекаются. Чтобы они пересекались необходимо диагональ ВД, соединяющий не равные углы продолжить до пересечения с диагональю АС.

3. Одна диагональ точкой пересечения делится на две равные части (у ромба при пересечении обе диагонали делятся пополам).

4. Одна диагональ является одновременно биссектрисой двух противоположных углов (у ромба обе диагонали являются биссектрисой углов).

5. Только одна диагональ разделяет дельтоид на два равнобедренных треугольника (у ромба обе диагонали делят дельтоид на два равнобедренных треугольника).

6. Одна диагональ разделяет дельтоид на два равновеликих треугольника (у ромба обе диагонали делят дельтоид на равновеликие треугольники) и др.

В свойствах 3,4,5,6 речь идет о диагонале АС, который играет особую роль. Поэтому его можно назвать «основной». Другую диагональ дельтоида, которая является осью симметрии дельтоида, можно назвать «высотной». Её образуют высоты соответствующих равнобедренных треугольников, если рассматриваемый дельтоид не ромб.

Периметр дельтоида

Зная, что периметр многоугольников находится как сумма всех его сторон. Не трудно вывести для учащихся формулу периметра дельтоида (одновремено для выпуклых и для невыпуклых):

$$p = AB + BC = СД = AC. \qquad (1)$$

Площадь дельтоида

В одном из своих статей Б.С. Прицкер высказал мысль, что площадь любого четырехугольника может быть выраженая формулой [4, с. 66]. Учитывая, что формула площади дельтоида в спавочниках по математике отсутствует и о них практически не встечаются статьи даже в популярной литературе. Попробуем по рисунку 1 опредлить формулу площади выпуклого и невыпуклого дельтоидов:

$$S_{\text{дельтоида}} = S_{ABC} + S_{АДС} = AC\times BO:2 + AC\times ОД:2 = AC\times(BO + ОД):2 = AC\times ВД:2, \qquad (2)$$

где АС и ВД диагонали дельтоида. Или тоже самое, если переобозначить диагонали

$$d_1 = AC \text{ и } d_2 = ВД. \qquad \text{Тогда}$$

$$S_{\text{дельтоида}} = d_1 d_2:2, \quad \text{где } d_1 \text{ и } d_2 \text{ диагонали дельтоида.} \qquad (3)$$

При определении площади невыпуклого дельтоида площади треугольников АВС и АДС не складываются как при выпуклом дельтоиде, а вычитаются. Поэтому вывод формулы площади невыпуклого дельтоида выглядит так:

$$S_{\text{дельтоида}} = S_{ABC} - S_{АДС} = AC\times ДО:2 - AC\times ОД:2 = (BO - ОД)\times AC:2 = AC\times ВД:2. \qquad (4)$$

Или через его диагонали:

$S_{дельтоида} = d_1d_2:2$, где d_1 и d_2 диагонали невыпуклого дельтоида.

Таким образом, при выводе формулы площади выпуклого и невыпуклого дельтоида мы получили одну и ту же формулу:

$$\mathbf{S_{дельтоида} = d_1d_2:2}, \text{ где } d_1 \text{ и } d_2 \text{ - диагонали дельтоида.} \qquad (5)$$

Тогда можно сказать, что площадь любого дельтоида равна половине произведения его диагоналей. (Формула площади дельтоида и ромба одинаковы, что говорит о некоторых родственных связях этих фигур).

Как выяснилось выше, дельтоид является симметричной фигурой. Поэтому, при решении соответствующих задач удобно использовать декартову систему координат, поместив точку пересечения диагоналей дельтоида в начало координат.

Задача 1. *Углы дельтоида равны 50^0 и 100^0. Определите оставшиеся углы.*

Решение

1) Как уже отмечалось, два из четырех углов дельтоида равны друг другу. (Это тоже одно из свойств дельтоида). Поэтому возможны три случая: два,когда один из известных углов равен неизвестному, и третий, когда друг другу равны неизвестные углы.

А. Пусть один из неизвестных углов равен 50^0. Тогда, четвертый угол равен:

$360^0 – (100^0+50^0+50^0)=160^0$.

В. В случае, когда один из неизвестных углов равен 50^0, четвертый угол равен:

$360^0 – (100^0+100^0+50^0)=110^0$.

С. Если неизвестные углы равны друг другу, их сумма равна:

$360^0 – (100^0+50^0)=210^0$. Поэтому, каждый из неизвестных углов равен

$210/2=105^0$ [3].

Задача 2. Основная диагональ дельтоида равна 80 мм, высотная – 21 м м, одна сторона 65м. Определите периметр дельтоида.

2) Половина основной диагонали является катетом, сторона дельтоида гипотенузой прямоугольного треугольника. Тогда другой катет равен

$$\sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{2500 - 1600} = \sqrt{900} = 30.$$

Так как высотная диагональ меньше, это означает, что имеет место невыпуклый дельтоид. Высота другого равнобедренного треугольника (ACD на рисунке 1) равна

$30 – 21 = 9$.

Теперь, воспользовавшись меньшим прямоугольным треугольником (АДО), по теореме Пифагора получим другую сторону дельтоида:

$$АД = \sqrt{9^2 + 40^2} = \sqrt{1681} = 41.$$

Следовательно, периметр дельтоида равен:

$50 + 41 + 50 + 41 = 182$ мм.

Задача 3. *Основная диагональ невыпуклого дельтоида равна 168 м, одна сторона 85 м, другая – 105 м. Вычислите площадь дельтоида.*

Решение

1) Невыпуклый дельтоид является разностью двух равнобедренных треугольников с общим основанием – основной диагональю дельтоида. Поэтому площадь дельтоида в *этом случае является* Место для формулы *разностью площадей равнобедренных треугольников. По теореме Пифагора высота большего:*

$$\sqrt{105^2-\left(\frac{168}{2}\right)^2}=\sqrt{11025-7056}=\sqrt{3969}=63;$$

высота меньшего: $\sqrt{85^2-\left(\frac{168}{2}\right)^2} = \sqrt{7225-7056} = \sqrt{169}=13.$ Соответственно,

площадь большего равна: $\frac{168\cdot 13}{2}=1092.$ *Поэтому, площадь дельтоида находится из разности:*

5292-1092=4200 [3].

При изучении данной темы дополнительно можно рекомендовать следующие задачи.

1. Углы дельтоида равны 211^0 и 18^0. Определите оставшиеся углы.
2. Углы дельтоида равны 58^0 и 164^0. Определите оставшиеся углы.
3. Основная диагональ дельтоида равна 48 мм, высотная – 22 мм, одна сторона 40 мм. Определите периметр дельтоида.
4. Задача. Основная диагональ дельтоида равна 120 м, высотная – 36 м, одна сторона 65 м. Определите периметр дельтоида.
5. Основная диагональ выпуклого дельтоида равна 90 м, одна сторона 75 м, другая – 53 м. Вычислите площадь дельтоида.
6. Высотная диагональ невыпуклого дельтоида равна 1,5 см, одна сторона 13 см, другая – 12,5 см. Вычислите площадь дельтоида.
7. Основная диагональ невыпуклого дельтоида равна 48 м одна сторона 25 м, другая – 26 м. Вычислите площадь дельтоида.
8. Высотная диагональ выпуклого дельтоида равна 240 см, одна сторона 29 см, другая – 221 см. Вычислите площадь дельтоида и др.

В заключении заметим, что включение в содержание математического образования новой темы «Дельтоид» ранее никогда не изучавшийся в школе, создает более благоприятные условия для использования на уроках различных методов обучения. Тема интересна не только лаконичными формулами, но и её большой практической востребованностью.

Литература:

1. Предметный стандарт «Математика 5 – 9 кл.». – Бишкек, 2015. -41 с.
2. Программа по математике для основной школы. 5 – 9 классы. –Бишкек, 2015. -30 с.
3. Учебник «Математика 7 класс» авторы С.К.Кыдыралиев, А.Б. Байзаков, А.Е.Касымов, Б. Урдалетова, Б.Чоробек к. -Бишкек, 2017. -310 с.
4. Прицкер Б.С. Площадь четырехугольника // Математика в школе. 1990. – «4. –С. 66 – 67.
5. Миракова Т.Н., Дорофеев Г.В. Программа спецкурса для физико-математических факультетов пединститутов // Математика в школе. -2005. -№5. –С. 55 – 63.
6. Син Е.Е. Вопросы оптимизации курса математики в школе // Известие КАО. – 2015. - №2. –С. 91 – 96.